Mestrado em Educação
Revista Profissão Docente
UNIUBE – Universidade de Uberaba
ISSN:1519-0919
www.uniube.br/propep/mestrado/revista/

ANÁLISE DE LIVROS TEXTO DE CÁLCULO E UMA PROPOSTA DE ALTERAÇÃO METODOLÓGICA

ANANALYSIS ON CALCULUS TEXTBOOKS AND A METHODOLOGY PROPOSAL

FERRAZ, Ademir Gomes.

Doutor em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco- UFPE
Professor na Universidade Federal Rural de Pernambuco- UFRPE – Pernambuco
Brasil
ademir.ferraz@gmail.com.br

RESUMO

A percepção de estudiosos do ensino-aprendizagem sobre livros texto, nas diversas ciências, é a de que existe um movimento de alterações das mais variadas matizes nas obras atuais, (2000 - 2003). No caso do Cálculo Diferencial e Integral, percebe-se que os autores de obras voltadas para esse conteúdo, vêm alterando não só o layout das edições, mas, também, a metodologia. Verificamos em estudo recente, (2006), ao trabalhar com 47 alunos de Especialização em Matemática no tópico Gráfico de Funções, que a metodologia atual dos Livros Texto de Cálculo, ao compactar as informações visuais com a formulação conceitual das funções polinomiais de até terceiro grau, permite ao aluno uma aprendizagem rápida e eficaz. Isso parece contradizer a metodologia de livros aqui chamados de antigos como, por exemplo, Courant & John (1965) e Moise (1970), com aqueles, aqui chamados de novos com, por exemplo, Anton (2000) e Thomas et all (2002). Este artigo, que teve como principal finalidade fazer uma análise comparativa entre as obras aqui colocadas, revelou grandes fragmentações na apresentação do tópico nas obras chamadas de antigas, e um brusco movimento de mudança dessa fragmentação nas obras chamadas atuais.

Palavras-chave: Cálculo. Metodologia. Funções. Gráfico de Funções.

ABSTRACT

The specialists' of the teaching-learning perception, provoked in the most several sciences, alterations of the most varied shades. In the case of the Differential and Integral Calculation it is noticed that the authors / researchers of works gone back to that mathematical content, it is altering not only the layout of the editions as, and mainly, the methodology contained in their works. We verified in recent study (2006) when working with 27 students of Specialization in Mathematics in the topic Construction of Curves, there to be great suggestion that the current methodology of the Technical Books of Differential and Integral Calculation, when compacting the visual information with the conceptual formulation of polynomial of functions of up to third degree, it allows to the student a fast and effective learning. That seems to contradict the methodology of old books, for instance, those more known between 196_ and 199_ as Courant(1995) and Moise(1970).

Key-Words: Calculation. Methodology. Functions. Sketch of Curves.

INTRODUÇÃO

Livros textos de Matemática vêm apresentando modificações relevantes, não só em sua estrutura física, mas, também, em sua abordagem pedagógica e metodológica. Neste trabalho apresentamos uma análise de modificações de livros-texto de cálculo com foco nas obras compreendidas entre 1965 e 2003 nos voltando ao que Dugdale (1993) chama de *significado global do gráfico*.

Ao tratar da perspectiva de gráficos de funções no pensamento de estudantes, Dugdale (1993) fala dos esforços para melhorar a leitura e compreensão das concepções dos estudantes a partir da interpretação do *significado global do gráfico*. Por meio da análise dessas obras conjugada com a aplicação junto aos 47 estudantes participantes do experimento, buscamos mostrar a importância das alterações metodológica que é proposta, em nossa tese, combinada com as alterações metodológicas apresentadas pelos autores atuais de livros texto de calculo.

As modificações aqui referidas não são particulares da Matemática, de modo geral, e do Cálculo de modo particular, outras obras de outras ciências como, por exemplo, da Física como Halliday et all (1997). Estes, também, apresentam modificações em suas abordagens em relação às obras mais antigas. Aqui tomamos como recorte do Cálculo Diferencial e Integral, o estudo de Gráfico de Funções.

Compõe a hipótese do estudo central de nosso doutorado, a afirmativa de que o processo metodológico da apresentação tradicional do gráfico de funções é um, entre outros fatores, que dificulta a aprendizagem do aluno. Desta forma defendemos uma metodologia na qual, inicialmente, dê-se ênfase a um gráfico completo, no dizer de Dugdale (1993), abordando-se todos os seus elementos e as relações entre os mesmo.

Pesquisadores têm apontado a imagem como grande auxilio na aprendizagem. Por exemplo, de um lado Santos (2002, p. 112) afirma que imagens são "uma forma de linguagem que pode contribuir para a aprendizagem dos conceitos científicos”. De outro Archela (2005, p.1) vem dizer:

> Em primeiro lugar, é importante lembrar que na medida em que o usuário deixa de ser passivo diante de uma mensagem comunicada através de uma imagem, na tentativa de compreendê-la, **estabelece**-se um processo de descodificação. Assim, uma das formas de estudo das imagens refere-se à análise de seus elementos e as relações entre suas partes.

É nesse sentido que, como um estudo preliminar de nossa pesquisa de doutoramento, buscamos analisar livros-texto de cálculo diferencial e integral.

Trabalhamos com dois grupos de livros textos de Cálculo buscamos identificar a distribuição do tratamento de esboço de gráficos. Procedendo esta análise, denominamos os grupos de: livros textos antigos e livros textos atuais (ou novos). A justificativa para tais denominações, bem como os representantes de cada um dos grupos, será apresentada posteriormente.

Defendemos que o processo metodológico da apresentação tradicional do tópico Esboço de Gráfico de Funções tende a dificultar a aprendizagem. Dizemos que uma metodologia com ênfase inicial em um gráfico completo[1], abordando-se todos os seus elementos e as relações entre os mesmo, é facilitadora da aprendizagem.

Conforme informamos, trabalhamos com dois grupos de livros a fim de identificar a metodologia de apresentação e construção de gráficos: As edições aqui chamadas de "novas" em confronto com as edições aqui chamadas de "antigas". Como antigos tomamos edições publicadas entre 1965 e 1970. Como novos, edições publicadas entre 2000 e 2003. Para o termo *fragmentado* a ser utilizado no trabalho, buscamos o enquadro nas seguintes características:

1. Número de páginas separando elementos constitutivos do gráfico;
2. Ausência de gráficos completos e;
3. Ausência de um capítulo próprio ao estudo do esboço de gráficos.

E, muito embora, conforme discutimos no item 1.2.1 observando tópicos fragmentados o problema não se restrinja à *fragmentação*, este é o foco principal desse trabalho.

1.1 - O PANORAMA ATUAL

A bibliografia, em parte aqui discutida, referente ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral, revela que o problema na construção de gráfico de funções polinomiais fracionárias, por parte do aluno, não se encontra, propriamente, no cálculo dos elementos necessários a tal construção. A problemática é mais visível na falta de compreensão da representação dos elementos no sistema de representação cartesiana; no comportamento de cada curva em seus diversos intervalos. Isto é: Na montagem do gráfico.

[1] Gráfico que contem todos os elementos possíveis como em uma função do tipo $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

O gráfico de uma função pode ser obtido por diversos métodos, estes métodos se modificam ao longo dos níveis de escolaridade em virtude de novas famílias de funções estudadas e do surgimento de novas ferramentas. Dentre outras formas de construir um gráfico, pode-se fazer a localização no sistema cartesiano de muitos pontos da função permitindo uma imagem de pontos discretos. Com o aumento da quantidade desses pontos, há uma maior aproximação da curva que determina realmente o gráfico. A escolha desses pontos também pode variar no caso de determinarmos uma constante e tomarmos o valor do domínio com espaçamentos determinados dessa constante: O Δx. Vejamos gráficos da função $y = f(x) = x^2$, no intervalo [-5;5] traçado com quantidade diferente de pontos.

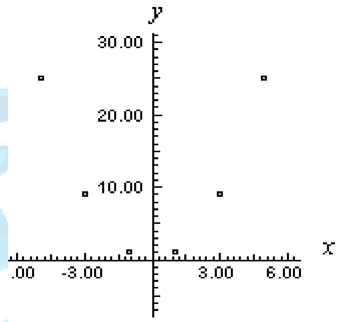


Figura 1- gráfico ponto a ponto

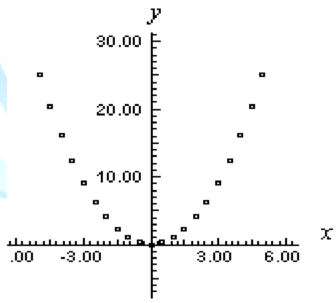


Figura 2-Gráfico ponto a ponto

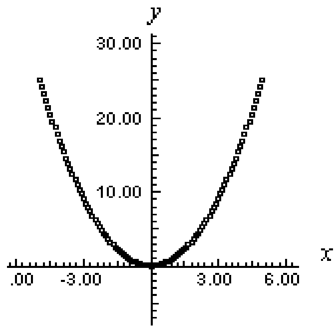


Figura 3-Gráfico ponto a ponto

Numa primeira abordagem, este método de traçar gráfico é importante para que o aluno possa ter uma primeira idéia da curva que representa a função. No entanto, no ensino fundamental e médio, como reflexo dos livros texto, dá-se pouca oportunidade ao aluno de experimentar esse tipo de construção antes de ser informado da curva característica da família da função. Informação essa que muitas vezes aparecem nos livros de forma implícita.

Ao final do Ensino Fundamental, e principalmente no ensino médio, as funções são exploradas por famílias como nas funções: afim, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e modulares. Para cada família dessas funções, há um tipo de curva geométrica que corresponde a seu gráfico como, por exemplo: na função quadrática a curva é uma parábola com eixo de simetria vertical; a função afim, uma reta, etc.

Desta forma, um procedimento muito comum nos livros textos, refletindo no ensino para traçar o gráfico de uma função, é calcular alguns de seus pontos localizando-os no gráfico, e traçar a curva característica da família da função utilizando tais pontos. Muitas vezes o aluno nem mesmo sabe por que, ou como está, de fato, utilizando tal processo. Há, então, uma mecanização na atividade. Neste caso vemos que, para traçar o gráfico de uma função quadrática, em geral se encontra o ponto correspondente ao vértice e dois pontos simétricos, depois se une estes pontos em forma de uma parábola. Este é um procedimento que, de certa forma, usa conceitos importantes do gráfico. No entanto exige-se o conhecimento de qual curva aquela família de funções tem como curva característica. Isto é possível numa abordagem, como no ensino médio, em que se estudam as famílias de funções que têm curvas bem delimitadas que as representam.

No entanto, no curso de Cálculo, este procedimento não mais dá conta. Diferentes famílias de função são estudadas conjuntamente sem que seja viável trabalhar pelo reconhecimento da curva que representa o gráfico da equação apresentada. É nesse sentido que, no estudo do cálculo, o traçado do gráfico de uma função migra para utilizar o esboço como estratégia de obtenção do gráfico.

A discussão que pomos agora é sobre o esboço do gráfico de uma função. Deste modo tomemos, inicialmente, o conceito de gráfico de uma função. O gráfico de uma função, tomado aqui como aquele no sistema Cartesiano, é o registro num sistema Cartesiano dos pontos (x, f(x)), do ponto de vista de Duval (2003, 2004), para x pertencente a um intervalo do domínio escolhido. Notamos que numa representação Cartesiana, representa-se apenas uma parte limitada do domínio da função, mesmo que este seja ilimitado. É bastante comum dizer-se: Dado uma função y = f(x), no plano cartesiano, o conjunto de todos os pontos na forma (x; y) é denominado gráfico da função.

Esboçar o gráfico de uma função é, portanto, dar um tratamento representativo ao *ente* Matemático a partir do conhecimento de como seus elementos constitutivos (Crescimento, Decrescimento, Concavidade, etc.) são representados num sistema Cartesiano. Além disso, o conhecimento desses elementos pode fornecer informações que nos leve tanto a entender a função em si mesmo, quanto ao que ela pode vir a representar. Seja no mundo concreto (real) seja no mundo abstrato sobre o qual se debruçam os matemáticos que “fazem” Matemática.

Neste sentido é necessário compreender os elementos constitutivos, e como os mesmos são representados no sistema cartesiano para poder montar o gráfico de uma função. Isto é obtido por meio de cálculos elaborados com o uso direto do limite ou com o seu uso “indireto” através da derivada.

Com estas idéias escolhemos a função polinomial fracionária para discutir os elementos matemáticos inerente ao estudo do esboço de gráficos de função. Características como intervalos de crescimento, decrescimento ou estabilidade, pontos críticos (de máximo, de mínimo ou de inflexão), concavidade, assíntotas, raízes são utilizadas no sentido de converter essas informações para a representação gráfica e então trazer um esboço do gráfico da função trabalhada.

Neste trabalho tomamos, inicialmente, as funções polinomiais e culminamos com as funções polinomiais fracionárias. Para determinarmos este tipo de função tomemos, inicialmente, a função afim cuja notação pode ser: f(x) = ax + b. Ao dizermos que esta é uma notação, queremos dizer que existem várias outras notações para esta função. O que determina a função em questão como polinomial é o fato do seu registro algébrico ser formado por um polinômio com as seguintes características: tem uma variável independente, x, e esta variável possui um expoente 1, que é multiplicado por uma constante a, a qual corresponde à taxa de variação; possui um termo independente, b. As funções polinomiais inteiras ou polinômios são do tipo:

$$i)\ f(x) = b,\ b \in \mathbb{R},$$
$$ii)\ f(x) = ax + b,\ (a,b) \in \mathbb{R}$$
$$iii)\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}$$
$$iv)\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}$$

Classificamos o polinômio quanto ao seu grau de acordo com o maior expoente de x nele existente. Assim, referentemente aos itens i, ii... iv acima, a função (i) é uma constante e o grau de seu polinômio é 0 (zero); a função (ii) é uma função afim e com polinômio de grau 1; a função (iii) é uma quadrática com polinômio de grau 2; a função (iv) é uma cúbica com polinômio de grau 3. No caso particular da função f (x) = 0, pode-se dizer que o polinômio não possui grau definido.

De uma forma mais geral temos que as funções polinomiais inteiras de grau n, podem ser representadas pela fórmula:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

com $a_n \neq 0$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$. A forma de obtermos as funções racionais fracionárias é dividindo o polinômio f (x), acima, por outro polinômio de mesmo tipo. Assim, dado

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,\ b_m \neq 0 \text{ e } b_0, b_1, \ldots, b_m \in R.$$

No caso de uma variável x, uma função polinomial fracionária é uma função que pode ser escrita na forma: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ onde f(x) e g(x) são funções polinomiais em x e g(x) não é a função nula. O domínio da função h(x) é o conjunto de todos os pontos nos quais g(x) não se anula e f (x) existe para todo x do domínio.

Além de elementos já comuns ao estudo dos polinômios, como regiões de crescimento, concavidades, pontos críticos, o trabalho da tese incluiu, ainda, um estudo do comportamento da função quando x se aproxima dos valores em que g (x) = 0 e f'(x) = 0.

Tanto durante a revisão bibliográfica de nossa tese quanto quando do experimento com os estudantes, percebemos que o aluno consegue, com certa freqüência, calcular os pontos específicos e intervalos necessários à construção do gráfico. Do mesmo modo, freqüentemente, não consegue concatenar os dados encontrados e, assim, ou apresenta um gráfico incompatível com os dados encontrados ou, simplesmente, nos informa: "*Professor, só deixei em branco o gráfico*".

Este é um problema de conhecimentos prévios obtidos quando da abordagem no ensino médio. O esboço de gráfico de função com o uso de derivada vem apresentado na ementa do ensino do Cálculo já no primeiro semestre. Ocorre que, de modo habitual, os professores não se dão conta do problema e o aluno sabe apenas identificar pontos da função no sistema cartesiano. Deste modo traça a curva característica da família de função.

No caso de não conhecer a curva característica, esse procedimento precisa ser substituído por uma forma de construir o gráfico por meio da representação dos elementos da curva. Desta forma apresenta-se uma dificuldade de obtenção do gráfico de uma função, principalmente quando o aluno depara-se com funções das quais ele não conhece a curva característica. Essa questão vem sendo discutida por pesquisadores preocupados com a necessidade de um melhor entendimento do aluno quanto ao gráfico da função com, por exemplo, Dugdale (1993); Schwartz et all (1993) e Gitirana et all (1997).

Por meio do gráfico é possível analisar características importantes de uma função. Além disso, diferentemente da sua representação algébrica, o gráfico permite uma análise global da função, uma visão do todo. Esse tipo de tratamento não se faz presente nos livros texto de Cálculo embora exista uma clara diferenciação metodológica nos tratamentos entre os livros textos novos e os antigos, com os primeiros tendendo a idéia da necessidade de se trabalhar com o gráfico global.

Podemos, por exemplo, verificar o exposto através do gráfico abaixo. Ele nos facilita identificar o domino; O ponto de interseção com os eixos; As regiões de concavidade; As assíntotas, etc.

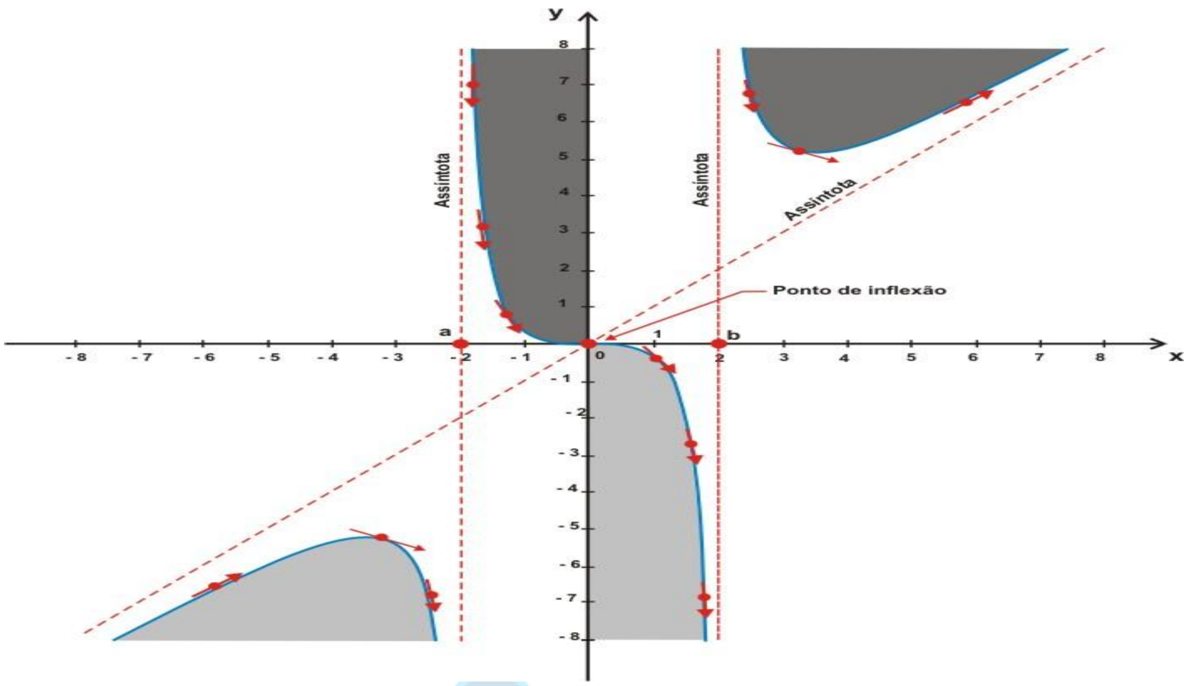


GRÁFICO 1 – Gráfico completo

O aluno, com freqüência, encontra estes dados através dos cálculos. Entretanto, freqüentemente, não consegue uma noção geométrica compatível com os cálculos efetuado e, portanto, não consegue instituir um esboço compatibilizado com os cálculos efetuados. Perde assim, um fundamental aliado na interpretação tanto da função quanto do que representa o gráfico em si mesmo.

Construir gráfico é diferente de interpretar. Tanto do ponto de vista cognitivo quanto do ponto de vista qualitativo. Temos, em perspectiva, duas questões: a construção do gráfico e sua interpretação. A convicção da necessidade do aluno compreender o gráfico de uma função está contida em preocupações de pesquisadores como Gitirana et all (2001, p.1) que vêm dizer:

> Estudos atuais (Leinhardt, Zaslavsky, e Stein, (1990); Mevarech e Kramarsky,1997) vêm mostrando que os gráficos são um importante recurso para a resolução de problemas do cotidiano e é preciso que os alunos tenham clareza que interpretar gráficos refere-se à habilidade de ler, ou seja, de extrair sentido dos dados... Nesse sentido, construir é qualitativamente diferente de interpretar...

Schwartz e Yerushalmy (1993, p. 42) Ao tratarem da perspectiva de gráficos de funções no pensamento de estudantes, vêm dizer:

> Estudantes aprendem a manipular funções manipulando os símbolos que as representam. Porém, as funções também podem ser representadas graficamente, e os estudantes também podem aprender a manipular as funções manipulando os gráficos que as representam...

Quando Duval (2003, 2004) vem dizer que não podemos confundir o objeto matemático com sua representação, também nos está dizendo que não podemos confundir os objetos entre si. O que pode ocorrer quando não atentamos para a fragmentação. É bem verdade que Scalco (2004) nos mostra que dois objetos distintos podem ter a mesma projeção, a mesma imagem. No entanto, o caso não se aplica a representação discutida por Duval (ibidem), nem no corpo da matemática. Temos um caso de desenho projetivo de um objeto sólido e, portanto, no campo não abstrato. Por seu lado Lévy (1995) defende que a aprendizagem é mais propicia, mais eficaz, quando percebemos um maior número de conexões entre os objetos, o que não se dá na matemática sem o uso de representações conforme nos diz Duval (2003,2004).

1.2 - **UM BREVE ENFOQUE A RESPEITO DO LIVRO TEXTO DE CÁLCULO**

Não vamos tratar das modificações em livros textos como sendo "evoluções". Preferimos utilizar o termo "alteração metodológica", evitando discussões sobre o que, de fato, significa evolução de livros texto.

Entre 1965 e 1989, Courant & John (1965), Lang (1965, 1972), Piskunov (1969), Moise (1970), Ávila (1978) e Simmons (1985), por exemplo, davam um tratamento matemático ao gráfico de funções apresentando segmentos que justificavam a informação algébrica apenas para um dos elementos necessários à construção do gráfico.

Autores como Courant & John (1965), por exemplo, tratavam da região de crescimento de uma função na página, 20 (vinte) e vinham tratar da concavidade na página 158 (Cento e cinqüenta e oito). Essa apresentação torna fragmentada a abordagem do estudo. Com a fragmentação estas obras não apontam para uma noção dirigida, propriamente, à compreensão clara de como se constrói o gráfico de uma função.

Tomemos, por exemplo, Moise (1970). Moise (1970, p. 200) vem dizer: "Recordemos da secção 3.9, a definição de função crescente: a função f é crescente se X < X' => f(X) < f(X') (*se x é menor do que x', então f(x) é menor que f(x') – Nota nossa*). Analogamente f é decrescente se X < X'=> f(X) > f(X')". Em seguida Moise (1970) apresenta o gráfico explicativo referente, exclusivamente, a este item. Observa-se que Moise (1970) entra com o teorema do crescimento na secção 3.9, colocando no bojo do estudo do Valor Médio de uma função no item *Principio da Compressão: A* *derivada da Integral*, e com os exemplos na secção 5.1. Havendo, então, 81 (oitenta e uma) páginas de separação entre teoria e prática de gráfico de funções.

Por outro lado, livros textos mais atuais, como Thomas et all (2002), Anton (2000) e Larson (2003), trazem uma abordagem na qual os elementos constitutivos do gráfico tem uma discursividade mais próxima. Esta abordagem aponta diferenças significativas relativas aos livros antigos no que se diz respeito ao fato fragmentação. Anton (2000), ao apresentar o mesmo item acima, monotocidade de função, o faz em conjunto com a região de concavidade no item 5.1, Análise de Funções I: Crescimento, Decrescimento e Concavidade[2].

Enquanto Moise (1970. p. 200) usa dois gráficos pontuais (funções hipotéticas) como auxilio visual, Anton (2000, p. 289-324) utiliza treze gráficos. Sendo nove hipotéticos envolvendo os dois tópicos, e quatro específicos (Funções reais) em um contexto geral envolvendo todo o gráfico da função, sempre que possível.

Justificarmos as escolhas das obras “antigas” em virtude de terem sido as mais usadas nos cursos de Matemática entre 1965 e 1970. Casos de Courant & John (1965), Moise (1970), Lang (1965), Piskunov (1969), etc. Analogamente justificamos a escolha das obras “atuais” de Anton (2000) e Thomas et all (2002). A forma que consideramos mais consistente para suportar tal afirmativa foi pesquisar, de 2005 a 2006, a bibliografia de cursos das distintas épocas nas universidades brasileiras. No caso pudemos verificar a existência destas obras em cursos de matemáticas e áreas afins, em seis das dez maiores universidades do Brasil: Universidade de São Paulo; Universidade Federal do Pará; Universidade Federal de São Paulo; Universidade Federal do Rio de Janeiro; Universidade Federal de Minas Gerais; e Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Analisando outras obras contemporâneas de Courant & John (1965) como Lang (1965) e Piskunov (1969), já que seguem o mesmo padrão metodológico, fazemos uma breve confrontação da questão “método-pedagógico” com obras metodologicamente diferenciadas na atualidade como Thomas et all (2002) e Anton (2000). Estas últimas contrastam não só com o enfoque das obras tradicionais de 1965 a 1970 como, também, com o tratamento metodológico, layout, etc.

[2] Uma sistematização é feita no subitem 1.2.1, tabela I.

Courant & John (1965) têm metodologia próxima da de Moise (1970). Iniciando o tratamento de gráfico de função com o elemento crescimento, Courant & John (1963, p.14) vêm dizer:

> A restrição que imporemos agora, ao conceito de função, é: a representação geométrica da função deve assumir a forma de uma curva geométrica "plausível". É verdade que isto implica mais em uma vaga idéia geral do que, propriamente, em uma estrita condição matemática. Cedo, porém, formularemos tais condições, como continuidade, a derivabilidade e outras que farão com que o gráfico da função possua o caráter plausível, visualmente, de representação geométrica.

Estes autores retomam os elementos de uma curva com o teorema das funções contínuas, página 63, os Máximos, Mínimos e Concavidade à página 158. A abordagem de Moise (1970, p.200-248) referente ao gráfico de funções com o auxilio da derivada, vem apresentado no tópico: *A Variação das Funções Contínuas*. Não existindo, portanto, um tópico particularmente dedicado ao gráfico de funções, do mesmo modo que não existe em Courant & John (ibidem).

Abordando, continuamente, as obras cada vez mais recentes a partir da década de 90, percebemos que essa metodologia vem tomando outras formas na direção do que ocorre atualmente com as de Anton (2000) e Thomas (2002). Ao tempo em que observamos ser Leithold (1977) e Piskunov (1969) os precursores de uma modificação conteúdista que mais chamam a atenção. Estes autores deram ênfase ao número de exercícios propostos e resolvidos como fator principal da aprendizagem em matemática.

Na abordagem contemplada por Thomas et all (2002, p.229-250) e Anton (2000, p. 289-324) são apresentadas, respectivamente: Aplicação da Derivada e Análise das Funções e Seus Gráficos. O uso dos gráficos, por estes autores, está posto dentro de uma mesma perspectiva: fornecer uma noção gráfica do que diz a linguagem matemática a respeito das definições, conceitos e teoremas.

Ao anunciar as características da décima edição, Thomas et all (2002, p. ix) vem dizer: "Com uma linguagem simples, cada tópico novo é explicado por meio de exemplos claros, cuidadosamente resolvidos e de fácil compreensão, reforçado por sua aplicação no *mundo real* (*destaque nosso*)". Enquanto isso Moise (1970, p.203) vem dizer: "Este não é um problema artificial, é um problema da *vida real* (*destaque do nosso*) e nada vai ser fácil".

As duas citações vêm sugerir que, enquanto Moise (1970) tem como filosofia tratar a questão de uma função do mundo real de forma esporádica, Thomas et all (2002) sugere uma filosofia de trabalho pautada, quando possível, no mundo real. O que demanda profunda diferença. Ainda na apresentação das características da décima edição, Thomas et all (2002, p.ix) acrescentam: ”Com ênfase na modelagem e suas aplicações do cálculo usando dados reais, procura-se dá mais equilíbrio ao método gráfico, numérica e analítico, sem comprometer a integridade matemática do livro”.

Diante do exposto percebemos grande diferença de apresentação, e de abordagem, entre os livros textos de Cálculo, aqui chamados de antigos e de novos. Ainda que as edições mais atuais pontuem um caminho mais ameno ao aluno, as abordagens se encontram distante daquela que vimos defender em nossa tese e que, resumidamente, podemos ancorar nos seguintes pontos: a falta de gráfico global; a ausência de uma análise entre as características dos elementos constituintes do gráfico; a ausência de um enfoque que leve em consideração a aprendizagem em matemática através do uso de, pelo menos, duas representações do mesmo objeto como defende Duval (2004).

1.2.1 – Observando tópicos fragmentados.

O que passamos a apresentar é uma breve análise de tópicos inerentes ao gráfico de funções de grau máximo três, aqui adotado (vide nota de rodapé 1). Os elementos Extremos Locais, Ponto de Inflexão, Descontinuidade e Intervalos de comportamento da função, são pontos particulares do gráfico da função. Deste modo o estudo apresentado não está fazendo foco no gráfico ponto-a-ponto. Trabalhamos, como vimos dizendo, com foco no gráfico global. A respeito do assunto Gitirana et all (1991, p. 1) vêm dizer:

> Para discutir a interpretação local / global é preciso considerar se o foco de atenção busca um ponto no gráfico ou uma análise mais global. Vários autores (Bell e Janvier, 1981; Kerslake, 1981; Preece, 1983) argumentam que existe uma ênfase desproporcional no currículo em relação as questões que envolvem interpretações locais ou pontuais. Schoenfeld, Smith e Arcavi, in press; Stein, Baxter e Leinhardt, in press; Yerushalmy, 1988 argumentam que tal enfoque leva os alunos a terem uma concepção de gráfico como uma coleção de pontos isolados.

Tabela 1- Diagnose da Fragmentação no Ensino do Gráfico de Funções.

Assunto	Autores			
	Courant & John (1965) 609 páginas	Moise (1970) 487 páginas	Anton (2000) 670 páginas	Thomas et all (2002) 647 páginas
Crescimento da Função	Definição (p.20)	Definição (p. 119)	Definição (p.290)	Definição (p.251)
Decrescimento da	Definição (p.20)	Definição	Definição (p.290)	Definição

Função		(p.122)		(p.251)
Região de concavidade da função: Côncava	Definição (p.158)	Definição (p. 208)	Definição (p.292)	Definição (p.253)
Região de concavidade da função: Convexa	Definição (p.158)	Definição (p. 208)	Definição (p.292)	Definição (p.253)
Fragmentação de tópicos	138 páginas	86 páginas	2 páginas	2 páginas

Conforme já citado, o problema para a compreensão do aluno, não está apenas na fragmentação, mas, também, na abordagem onde se privilegia a linguagem formal em detrimento de outras linguagens como a figural e a materna. Certamente que todos os autores apresentam gráficos, símbolos e descrição do objeto apontando para os registros de representações semióticas de que trata Duval (2004). No entanto, entra na questão a fragmentação. Assim, o problema da construção do gráfico une a questão da fragmentação com idéias de Duval (Ibidem).

Se por um lado a fragmentação não é o único e principal obstáculo à aquisição do conhecimento, de outro, a sua existência, vai tornar ainda mais difícil a implementação da já intricada tarefa de Conversão contida nas principais idéias de Duval (2003, 2004). Uma vez que as representações do objeto fragmentam-se, a dificuldade em se perceber como as representações se dispõe aumenta o nível desta dificuldade.

A não existência de um tópico definido para o gráfico de funções em Courant & John (1965) e Moise (1970), ao contrario de Anton (2000) e Thomas et all (2002), conduz a um problema de dissociação da abordagem. Ora, de fato, se a aquisição do conhecimento matemático, de modo geral, é complexa conforme nos diz Duval (2003, 2004), a apresentação de elementos que vão construir um gráfico de forma fragmentada, torna essa compreensão ainda mais “dolorosa” ou mesmo impossível. Observemos que a região de crescimento da função está intimamente ligada à concavidade e ambas aos extremos locais. Desta forma, pelo menos, deveremos supor da conveniência destes elementos serem tratados o mais próximo possível.

1.2.2 – Introdução ao desenvolvimento de uma aula (Esboço de Gráfico)

Ao invés dos pontos tradicionais da Metodologia, preferimos conduzir tais pontos de forma aplicada colocando para o docente como, de nosso ponto de vista, se deve, metodologicamente, conduzir a aula sobre o ponto em questão e observando tratar-se do "dialogo[3]" com o discente. Toma-se, então, por exemplo, o gráfico abaixo:

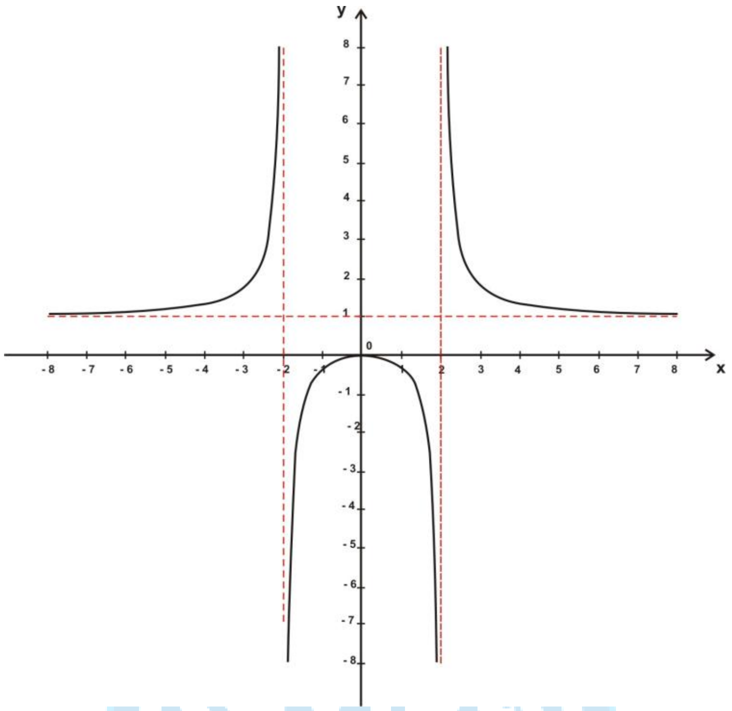


Gráfico 2- Gráfico exemplificativo de uma aula

Inicialmente verificamos o domínio máximo de definição da função que deu origem ao gráfico. Observamos, no gráfico, a existência de duas linhas verticais pontilhadas. Estas linhas indicam que o gráfico está compreendido dentro e fora delas. Isso quer dizer que o gráfico não toca nestas linhas. Estas linhas tomam, em matemática, o nome de assíntota. Perceba-se que temos uma linha horizontal com característica idêntica. Esta é, também, em matemática, chamada de assíntota. Neste ponto carecemos de uma discussão sobre os dois tipos de assíntotas apresentadas e chamarmos a atenção para a assíntota oblíqua do tipo y = as + b que não aparece neste gráfico, mas que ocorre em outros gráficos como o da função $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$.

Na discussão sobre a verificação do domínio, pode-se por as seguintes questões: Qual a relação do domínio com as assíntotas? A relação é que estes elementos nos quais a curva não toca, indicam que o domínio não pode conter todos os reais. Mas o que quer dizer isso? Aqui se deve fazer uma discussão. Qual outra forma de dizer que o domínio não é real? Aqui se deve fazer uma discussão.

[3] Na realidade não apresentamos um diálogo, mas a falação do docente para o discente.

Vejamos agora o ramo mais à esquerda do gráfico. O que ele indica? Que a função é crescente ou que a função é decrescente? Aqui se deve fazer uma discussão envolvendo a derivada primeira e a derivada segunda, de modo informal. Assim acabamos por chegar a pergunta: de quantas formas podemos escrever o intervalo?

Para todos os elementos existentes neste gráfico faríamos discussão análoga procurando, sempre, fazer com que o aluno descubra a relação entre eles (os componentes) bem como abordando o fato da necessidade de mais de uma representação para cada elemento. Estas discussões irão envolver a Conversão de que trata Duval (2003, 2004). Segundo Duval (ibidem) a aprendizagem em matemática passa pelo processo de Transformação que pode ser por Tratamento ou por Conversão. Uma aprendizagem mais significativa e duradoura, porém, só é possível, conforme Duval (Ibidem), se a Transformação de dá por Conversão.

Neste caso Duval (2003, p.19) diz haver duas situações: " Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência -, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência". A Conversão em Duval (Ibidem), somente ocorre de modo total se o trânsito entre, pelo menos duas representações, satisfizer: A Correspondência semântica das unidades de significado; A unidade semântica terminal e; A conservação da ordem das unidades.

A discussão de Conversão não-conversão pode ser compreendida de modo simples, embora a atividade seja complexa. Para compreender a Tabela 2 a seguir, há a necessidade de entender-se a questão da conversão. Coloquemos que: Se ocorre a conversão é porque o elemento de saída é menos complexo que o elemento de entrada. Exemplifiquemos: *Sendo a derivada primeira da função f'(x) o declive da reta tangente, encontre o declive quando x = 1*. Temos Congruência, pois o resultado final, a resposta, não é mais complexo do que a pergunta, a entrada, trata-se de simples substituição.

É importante entender, neste exemplo, que não se está falando em simplicidade quanto à resolução do problema que, a depender da função, pode ser bastante complexa. Estar-se falando da resposta que é um número. Por exemplo, tomando a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^5} - \sqrt[5]{x^9}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, em x = 0 temos, como resposta, f(0) = 0.

O que faríamos com a tabela 2 abaixo, seria discutir os elementos da primeira coluna em termos de comportamentos; relações, variáveis, unidades simbólicas e congruência não-congruência.

Tabela 2 – Tabela da análise de conversão congruente / não congruente dos elementos Crescimento, Decrescimento, Concavidade, Extremos Locais.

Comportamento	Relação	Variáveis visuais	Unidade simbólica	Congruência / não congruência
Cresce e é	f' >0	Sim	Sinal (+)	Sim (Um só sinal dizendo duas coisas)*
Côncava	f''>0			
Decresce e é	f' <0	Sim	Sinal (-)	Sim (Um só sinal dizendo duas coisas)*
Convexa	f'' <0			
Cresce e é	f'>0	Sim	Sinal (+)	Não (uso de dois sinais na representação de saída)**
			Sinal (-)	
Convexa	f'' <0			
Decresce e é	f'<0	Sim	Sinal (-) Sinal (+)	Não (uso de dois sinais na representação de saída)**
Côncava	f''>0			
Maximo Local	f'>0, f'= 0, f'<0	Sim	Sinal +, "0", -	Sim
Mínimo Local	f'<0, f'= 0, f'>0	Sim	Sinal +, "0", -	Sim

*A complexidade no registro de saída é menor do que a do registro de entrada; **A complexidade no registro de saída e igual à do registro de entrada.

Nesta Tabela vemos as relações entre alguns elementos. Observe-se que quanto aos extremos locais, duas últimas linhas, a coluna relação está verificando o comportamento da função em termos de crescimento e de decrescimento na chamada vizinhança destes extremos.

2. SOBRE A PESQUISA BASE (A TESE)

Nessa seção buscamos trazer à discussão o valor da imagem na compreensão humana sem que isso viesse a ser uma ação estática onde de um lado da lousa se tenha o símbolo e do outro a formalização matemática ou vice-versa. Apontamos para uma proposta onde se apresenta gráficos completos. Então nosso modelo foi o de gráficos "incompletos" enquanto parte de gráficos completos. Assim discutimos os elementos necessários à sua composição sem o uso da formalização matemática, que veio a ocorrer posteriormente, a fim de dá a devida sustentação a um trato informal possibilitando generalizações. Os gráficos apresentados foram representativos não só do mundo artificial, no dizer de Moise (1970), mas, também, do mundo no qual o aluno está inserido: O mundo real.

E, então, poderíamos usar de todo e qualquer material pertinente, criando o gráfico em suas partes de modo que o aluno pudesse usar todos os sentidos importantes à compreensão. Isso sem que fizéssemos uma contrariedade a Duval (2004) que nos diz não podermos ter acesso ao objeto matemático a não ser através de suas representações.

2.1 – Sobre a amostra.

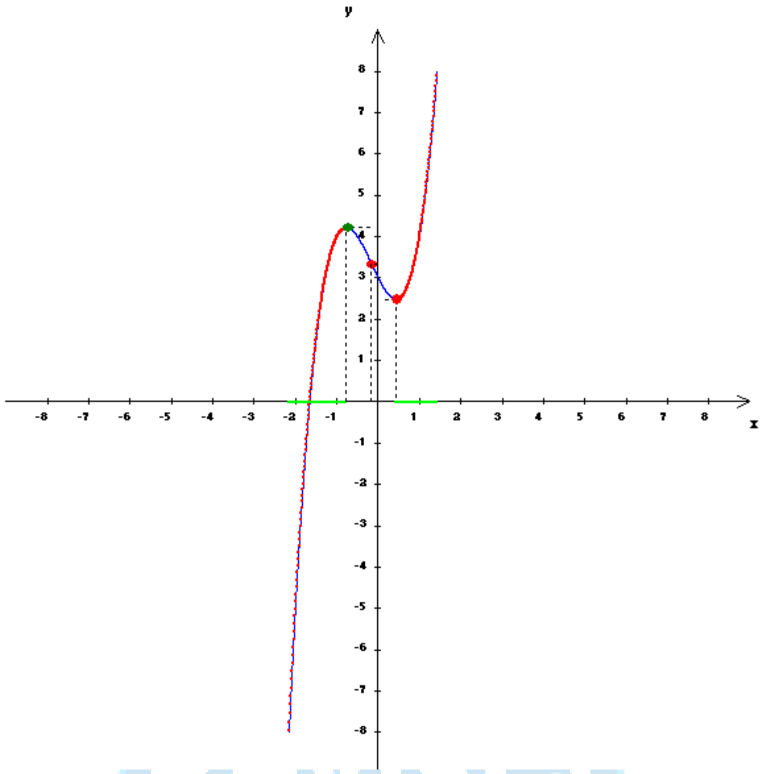
Os dados que passamos a apresentar vem relatar o desenvolvimento do aluno quando observada a metodologia aplicada. O público foi de 47 alunos. Todos cursando Especialização em Matemática na Universidade Federal Rural de Pernambuco. Neste estudo usou-se, apenas como apoio, motivo pelo qual não se fez menção aos mesmos, os softwares: Estudo de Funções, Ambiente Virtus e applets. Trabalhou-se, inicialmente, com um grupo de 35 alunos divididos em duas turmas. Uma com 20 e outra com 27 alunos. Os alunos são Professores da rede Estadual e / ou, municipal e /ou particular do Estado de Pernambuco na cidade do Recife e região metropolitana, cursantes da Especialização em Matemática na UFRPE. Foram escolhidos em virtude da facilidade de encontro uma vez que estes se davam todos os sábados na UFRPE.

2.2 - Resultados Parciais da Pesquisa

No estudo que vem dá origem a este trabalho, os dados colhidos para análise foram referentes a três questões contendo: Oito subitens na primeira questão; sete subitens na segunda questão e oito subitens na terceira questão. Apresentamos as questões:

Primeira questão:

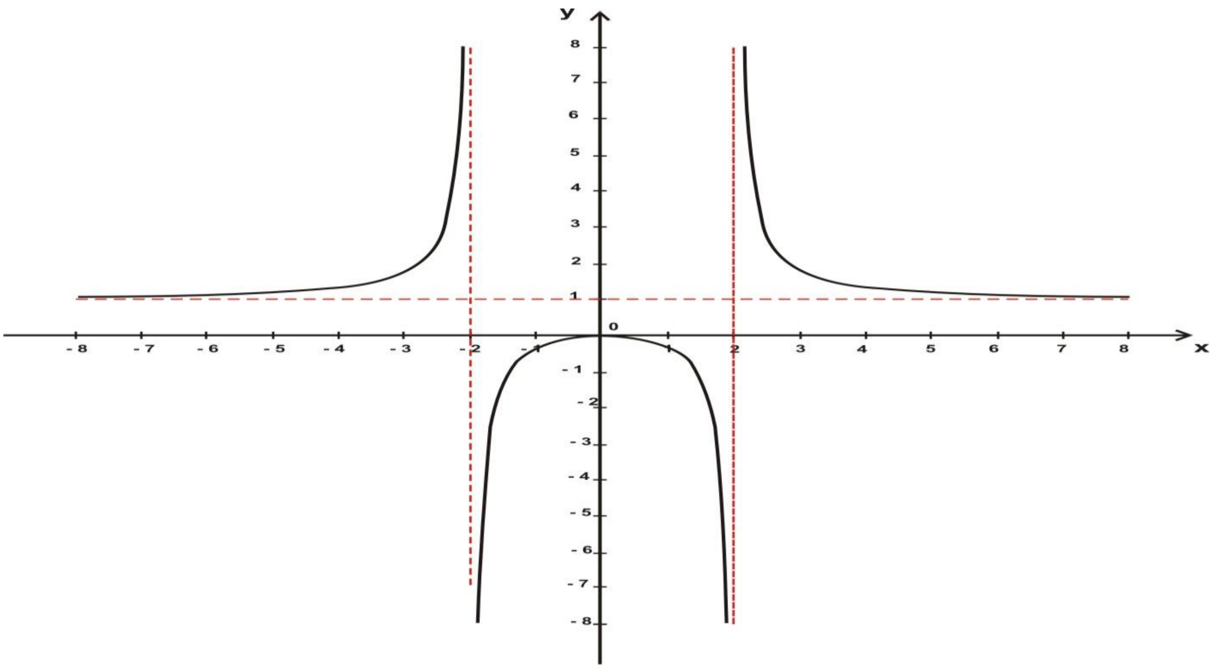
> *Observe o gráfico I abaixo e responda aos itens propostos observando sempre que este é um trabalho que não tem pontuação por acertos, mas sim pelo que você vai escrever para cada resposta. Estamos preocupados em saber quais as estratégias de vocês na solução do problema.*



a) Qual o domínio máximo de definição da função?
b) O que significa domínio da função em termos de suas variáveis?
c) Qual a imagem da função?
d) O que significa imagem de uma função em termos de suas variáveis?
e) Esta função possui raízes?
f) O que são raízes de uma função?
g) Essa função possui região de crescimento e de decrescimento? Se sim, qual ou quais?
h) O que acontece com a derivada primeira de uma função quando ela cresce ou decresce? Sua resposta deve, se possível, incluir a palavra intervalo e sua simbologia.

Segunda questão.

Considere o gráfico abaixo. Para cada item, onde houver a necessidade de notação, você precisa usar formas: (a, b); a < x < n; x = a, x = b e similares a [a, b), (a, b].



a) A função tem ponto crítico? Onde?
b) De acordo com a derivada primeira, o que é um ponto crítico?
c) A função tem ponto de máximo ou de mínimo local? Onde?
d) O que é necessário acontecer com a derivada primeira para que a função tenha um máximo ou mínimo local?
e) Quanto às assíntotas existem? Onde? De que tipo?
f) Esta função possui intervalo com concavidade para cima? Se sim, em que intervalos?
g) O que acontece com a derivada segunda da função o gráfico for côncavo para cima em um intervalo I e côncavo para baixo em um intervalo K do seu domínio, com $I \cap K = \phi$?

Terceira questão.

Mostre, o mais claro possível, todos os elementos existentes nas funções:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

a) *Domínio;*
b) *Imagem;*
c) *Região onde a função é côncava;*
d) *Região onde a função é convexa;*
e) *Região de crescimento e região de decrescimento;*
f) *Assíntotas;*
g) *Ponto Crítico;*
h) *Ponto de Inflexão;*
i) *Máximos e Mínimos locais*

A pesquisa trouxe como resultado final, *bruto*, o disposto na tabela 2 abaixo.

2.2.1 - **Média de acertos e de erros nos Testes**

TABELA 3- TABELA DE RESULTADO FINAL

	Pré-Teste %	Pós-Teste %
Erros	**82.31**	**28.22**
Acertos	**17.19**	**71,78**

3. CONCLUSÃO

O trabalho efetuado em sala de aula, bem como uma análise dos livros textos de Cálculo em questão, nos leva a acreditar que as transformações que vem ocorrendo nos livros textos pertinentes, apesar de positivas, não cumprem um papel decisivo na aprendizagem do conceito matemático. Duas observações nos parecem relevantes: de um lado o resultado apresentado na tabela 3 acima, que não é fruto do trabalho puro e simples com o livro texto. A tabela reflete uma ação de detalhamento e aprofundamento, não existente nos livros texto trabalhado, no trato do Esboço de Gráfico de Função.

De outro lado a evidência de que o aluno, submetido à visão gráfica da função acompanhada das discussões envolvendo as relações entre os elementos que compõem o seu gráfico, mobilizam várias representações do mesmo elemento. E, desta forma, conseguem atravessar tanto a barreira do desconhecimento, quanto quebrar a impedância cognitiva imposta por uma abordagem metodológica (caso da fragmentação) que não dê a devida importância à linguagem figural na abordagem do esboço de curva.

É fato que os livros textos aqui chamados de atuais, tendem a uma metodologia onde a imagem é um elemento fundamental a aprendizagem. Particularmente no que se refere a aprendizagem da matemática. De igual modo podemos ver que a fragmentação é um fator de dificuldade no entendimento desta ciência.

O panorama atual, nos sugere a verdadeira face da dificuldade do aluno na montagem do gráfico. Esta dificuldade reside na falta de percepção entre os cálculos efetuados para se encontrar os "entes" necessários a construção do gráfico, a relação entre eles e o traçado do gráfico. Assim, percebemos, com freqüência, o acerto nos cálculos e um traçado gráfico incompatível com os cálculos efetuados.

Uma aula onde a metodologia empregada, para o caso em pauta, prime por iniciar-se mostrando um gráfico completo; as relações entre os elementos destes gráficos e o motivo destas relações, parece fornecer, ao aluno, ferramenta cognitiva capaz de quebra a impedância comentada: Cálculo x traçado da curva.

Finalmente, é a fragmentação que, mais preponderantemente, assume a provocação das dificuldades do aluno no trânsito entre os cálculos necessários à construção do gráfico e a conexão com o traçado das linhas definidas pelos procedimentos algébricos.

REFERÊNCIAS

ANTON, H . **Cálculo um novo horizonte**. 6ª Edição. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ARCHELA , R. S. **Imagem e Representação Gráfica**. Disponivel em http://www.uel.br/projeto/cartografia/artigos/artigo02.htm Acessado em 15 de agosto de 2005, às 03:45 hs.

URL: ÁVILA, G, S. Cálculo. **Funções de uma Variável.** Rio de Janeiro: Editora LTC, 1978.

COURANT, R. & JOHN, F. **Introduction to Calculus and Analysis**, v.1, John Wiley & Sons, New York, 1965.

DUGDALE, S. **Functions and Graphs.** Perspectives on Student Thinking in Integrating Research on the Graphical Representation of functions – Lawrence Erlbaum Associates, Plublishers, Hillsdale, New Jersey , 1993.

DUVAL, R., Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: S.D.A. Machado, (org.). Aprendizagem em Matemática: **Registros de representação semiótica**. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003, pp.11-33.

___________ Sémiosis y pensamiento humano. **Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.** Universidade de Valle Instituto de Educación y Pedagogia. Grupo de Educación Matemática. 2004.

GITIRANA, G.F., GILDA, L. G. e ROAZZONI, A. **Interpretando e Construindo Gráficos**. Disponivel em <www.anped.org.br/reunioes/24/T1961055920448.DOC> Acessado em 21 de Março de 2007 às 00:45

HALLIDAY,D. RESNICK, R. & WALKER, J. **Fundamentals of Physics extended**. John Wiley & Sons. INC. New York, 1997

LANG, S. **A Second Course in Calculus**. Addison-Wesley Publ.Co. 1965.

LARSON, E. **Cálculo com Aplicações.** Sexta Edição. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2003.

LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência**. Rio de Janeiro: Ed 34, 1993.

MOISE, E. **Cálculo Um Curso Universitário**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1970.

PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. TOMO 1 Editora MIR 1ª Edição. MOSCOU, 1969

SIMMONS, G. F. Cálculo com geometria analítica. S.Paulo: MacGrawHill 1988.

THOMAS, B.J. **Cálculo de George B. Thomas Jr**, Volume I / Ross L. Finney, Maurice D. W, Frank R. Giordono; Tradução Paulo Boschcov; Revisão Técnica Leila Maria Vasconselos Figueiredo. São Paulo: Addsion Wesley, 2002.

SCHWARTZ J.L YERUSHALMY, M. E. **Seizing the opprtunity to Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting in Integrating Research on the Graphical Representation of functions**. Lawrence Erlbaum Associates, Plublishers, Hillsdale, New Jersey , 1993.

SANTOS, M.O.S. **Critérios para Avaliação de Livros Didáticos de Química para o Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2002

SCALCO, R. **Vistas Ortográficas**. Disponivel em:
<http://www.rautu.unicamp.br/DTarq/DTarq_M3.htm Acessado em 2004>
<http://www.rau-tu.unicamp.br/~luharris/DTarq/DTarq_M3.htm 2004> Revisitado em 26 de Março de 2010 as 15:05

Ademir Gomes Ferraz.
Graduação em Engenharia de Pesca pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Especialista homenageado em Matemática Pura pela FESP. Mestre em Ensino das Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco, linha de pesquisa Novas Tecnologias no Ensino. Doutor em Educação, Linha de Pesquisa Didática de Conteúdo Específico. Atualmente é professor Associado nível I da Universidade Federal Rural de Pernambuco. É membro do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática - GPEEM - UFSC nas linhas de pesquisa: Epistemologia, História e Ensino de Matemática Semiótica, Representação e Ensino de Matemática. Foi diretor, por 12 anos, do Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco- UFRPE.
Endereço eletrônico: ademir.ferraz@gmail.com.br

Artigo recebido em dezembro/2009
Aceito para publicação em janeiro/2010